O ARTEFATO “REPRESENTAÇÕES VISUAIS” COMO FERRAMENTA DE ENSINO EM MATEMÁTICA

THE ARTIFACT “VISUAL REPRESENTATIONS” AS A TEACHING TOOL IN MATHEMATICS

EL ARTEFACTO “REPRESENTACIONES VISUALES” COMO HERRAMIENTA DE ENSEÑANZA EN MATEMÁTICA

PAULA MONTENEGRO¹

CECÍLIA COSTA²

J. BERNARDINO LOPES³

1Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro. Portugal

2Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro. Portugal

3Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro. Portugal

RESUMO Este artigo apresenta os resultados de um estudo cujo objetivo geral é explorar modos de aumentar o impacto do uso de representações visuais como ferramenta epistêmica no ensino e na aprendizagem de diferentes domínios matemáticos do 2º. ciclo do Ensino Básico. O objetivo deste estudo é analisar duas situações de ensino e aprendizagem em que se utilizou o artefato representações visuais como ferramenta de aprendizagem. Os participantes são 17 alunos com idade média de 11,3 anos e a sua professora. Os alunos resolveram duas tarefas de áreas de figuras planas. Os dados foram recolhidos a partir da gravação áudio das aulas, dos registos escritos dos alunos, dos planos de aula e do diário da professora. Os resultados mostraram que a ferramenta tratamentos visuais potenciou transformações de representações. Concluimos que essa ferramenta pode ser uma técnica à disposição do professor para levar os alunos a construir o seu conhecimento, proporcionando uma mediação com múltiplas representações.

PALAVRAS-CHAVE: FERRAMENTA MATEMÁTICA; MEDIAÇÃO; REPRESENTAÇÕES VISUAIS; TRATAMENTOS VISUAIS.

ABSTRACT This paper presents the results of a study whose general objective is to explore ways to increase the impact of the use of visual representations as an epistemic tool in the teaching and learning of different mathematical domains of the Middle School. The objective of this study is to analyse two teaching and learning situations in which the visual representation artefact was used as a learning tool. The participants are 17 students with average age of 11,3 years old and their teacher. The students solved two tasks of areas of plain figures. Data were collected from an audio record of the classes, student's written records and the teacher's class plan. The results show that the visual treatments tool potentialized transformations of representations. We conclude that this tool can be a technique available for the teacher to take students to build their knowledge, allowing a mediation with multiple representations.

KEYWORDS: MATHEMATICAL TOOL; MEDIATION; VISUAL REPRESENTATIONS; VISUAL TREATMENTS.

RESUMEN Este trabajo presenta los resultados de un estudio cuyo objetivo general es explorar modos de aumentar el impacto del uso de representaciones visuales como herramienta epistémica en la enseñanza y el aprendizaje de diferentes dominios matemáticos del segundo ciclo de la Educación Básica. El objetivo de este estudio es analizar dos situaciones de enseñanza y aprendizaje en que se utilizó el artefacto representaciones visuales como herramienta de aprendizaje. Los participantes son 17 alumnos con edad promedio de 11,3 años y su profesora. Los alumnos resolvieron dos tareas de áreas de figuras planas. Los datos fueron recogidos de la grabación audio de las clases, de los registros escritos dos alumnos, de los planes de clase y le lo diario de la profesora. Los resultados mostraron que la herramienta tratamientos visuales potenció transformaciones de representaciones. Concluimos que esta herramienta puede ser una técnica a disposición del profesor para llevar a los alumnos a construir su conocimiento, proporcionando una mediación con múltiples representaciones.

PALABRAS CLAVE: HERRAMIENTA MATEMÁTICA; MEDIACIÓN; REPRESENTACIONES VISUALES; TRATAMIENTOS VISUALES.

INTRODUÇÃO

Este estudo fez parte de uma investigação mais ampla, cujo objetivo geral foi explorar modos de aumentar o impacto do uso de representações visuais como ferramenta epistêmica no ensino e na aprendizagem de diferentes domínios matemáticos do 2º. ciclo do Ensino Básico. Especificamente, caracterizamos em domínios matemáticos diferentes, transformações de e para representações visuais e o papel importante que tiveram no ensino e na aprendizagem de determinados conteúdos. A investigação ampla foi desenvolvida em três fases. A primeira mostrou que as representações visuais são um artefato com potencialidades para serem usadas na produção de conhecimentos novos, tanto pelo professor como pelos alunos (MONTENEGRO, COSTA & LOPES, 2018). Um dos resultados dessa primeira fase foi a verificação de que esta utilização não é inata nem evidente para o professor

nem para os alunos. Por essa razão, houve necessidade de uma fase de desenvolvimento profissional da professora envolvida nesse estudo, ao mesmo tempo em que familiarizava os seus alunos com a utilização de representações múltiplas (simbólicas, verbais e visuais) para o mesmo objeto matemático (MONTENEGRO, COSTA & LOPES, 2015; 2017a; 2017b; 2017c; 2017d), que constituiu a segunda fase do estudo amplo. Numa terceira fase, organizada em duas partes, preparou-se o conteúdo matemático em leção (Áreas de figuras planas) dotando os alunos de competências para realizar tratamentos visuais – parte 1 – com potencialidade de serem acionados numa situação nova de aprendizagem – parte 2. Este artigo descreve a Parte 1 da terceira fase do estudo mais amplo. Mais concretamente, descreve as tarefas que a professora propôs aos seus alunos para os dotar das competências necessárias para utilizarem as representações visuais como artefato, por meio da realização de tratamentos visuais.

PROBLEMA DE INVESTIGAÇÃO

As representações são a única forma de tornar reais e manipuláveis os objetos matemáticos, possibilitando a sua substituição (GOLDIN, 2008), conferindo-lhes o estatuto de modelos. De acordo com Nia e de Vries (2017), os modelos possuem i) uma natureza intrínseca que permite a sua familiarização com a sua estrutura material e os vários tipos de aparência, ii) e uma natureza intencional, sendo uma ferramenta epistêmica que permite a sua utilização de diferentes modos, apoiando o desenvolvimento ou a comunicação sobre conhecimento e artefatos. Combinando as duas naturezas, os alunos podem adquirir intuições a respeito das propriedades dos modelos, como questões de adequação e o conhecimento que subjaz à sua utilização.

O mesmo objeto matemático pode ser substituído por representações de sistemas diferentes. As representações matemáticas mais comuns usadas nas aulas de Matemática são simbólicas, verbais e visuais, pertencentes a diferentes sistemas de representação com códigos e regras específicos. Segundo vários autores, por exemplo Duval (2006), os alunos só são capazes de compreendê-los se estabelecerem uma correspondência entre as distintas representações, o que é motivo de dificuldades para uma parte significativa dos alunos do Ensino Básico. Por sua vez, a atividade na aula de Matemática dá uma prevalência a representações simbólicas, dificultando a fluência entre as diversas representações. As representações visuais possuem determinadas características que potenciam a fluência de representações, por meio da transformação de umas nas outras, no mesmo ou em sistemas de representação diferentes (MONTENEGRO et al., 2018). Duval (2006) considera dois tipos de transformações de representações: os tratamentos e as conversões. Os tratamentos são alterações que se fazem a determinada representação sem sair desse mesmo sistema de representação. Por exemplo, encontrar a solução de uma expressão numérica – todas as alterações se fazem no sistema da representação inicial (simbólico numérico). Uma conversão pressupõe a transformação, uma na outra, de duas representações de sistemas de representação diferentes. Por exemplo, construir um gráfico a partir de uma expressão algé-

brica ou vice-versa. A expressão algébrica pertence ao sistema de representação simbólico (algébrico) e o gráfico ao sistema de representação visual. As conversões são as transformações mais difíceis de adquirir (CALLEJO, ZAPATERA, 2014; DREYFUS, 1991; DUVAL, 2006; PRESMEG, 2006).

As representações visuais podem ser utilizadas como estratégia de ensino (SARAI-VA, LOPES, CRAVINO, SANTOS, 2012), e pelo aluno enquanto procura a solução de um problema. As ações que essas práticas epistêmicas desenvolvem (REVELES, CORDOVA, KELLY, 2004) podem influenciar as suas competências epistêmicas (JAIPAL, 2010), pelo que os alunos mais jovens devem desenvolver uma rotina e uma capacidade de explorar e operar representações visuais (STYLIANOU, SILVER, 2004). Assim, as representações visuais podem ser um artefato, pois podem ser usadas como ponto de partida para fazer algo em Matemática. Um artefato é um objeto, material ou não, resultante de uma atividade humana e com potencialidades de ser acionado numa atividade nova (MONAGHAN, TROUCHE, BORWEIN, 2016). Um artefato se transforma numa ferramenta quando é usado por um agente, usualmente uma pessoa, para fazer alguma coisa (MONAGHAN, TROUCHE, BORWEIN, 2016; VENKAT, ASKEW, 2018). Uma das formas de utilizar o artefato representações visuais como ferramenta é por meio da realização de tratamentos visuais (MONTENEGRO et al., 2018). No entanto, para que os alunos consigam se apropriar da utilização de representações como uma ferramenta, é necessária uma mediação do professor, pois esse uso precisa ser aprendido e desenvolvido (MONTENEGRO et al., 2018). O estudo descrito neste artigo focou a análise de duas situações de aprendizagem em que a professora induziu a utilização de tratamentos visuais durante a atividade de um grupo de alunos. Esta parte do estudo pretendeu responder à seguinte questão: *De que forma pode o professor induzir os alunos a usarem o artefato representações visuais como ferramenta?* E teve por objetivo analisar duas situações de ensino em que se utilizou o artefato representações visuais como ferramenta de aprendizagem, identificando as ações necessárias para o efeito.

METODOLOGIA

Este estudo pretendeu ser particular, descritivo e interpretativo, pois envolveu um estudo intensivo e detalhado, procurando aprofundar o conhecimento da atividade dos alunos com a realização de tratamentos visuais a representações visuais. Por essa razão, procedeu-se a uma investigação de carácter qualitativo, um estudo de caso (YIN, 2003). A unidade de análise foi o conjunto de alunos com a sua professora. Os dados foram recolhidos num grupo de alunos de uma turma do 6º. ano em aulas sobre os conceitos de polígono inscrito numa circunferência, polígono circunscrito a uma circunferência e a fórmula para a área de um polígono regular.

PARTICIPANTES

Os participantes foram 17 alunos (idade média de 11,3 anos) e a sua professora de Matemática de uma escola pública do norte de Portugal. Pelos resultados da Fase 1 do es-

tudo, a professora percebeu que podia usar as representações visuais como artefato durante o ensino e aprendizagem. No entanto, essa utilização não era evidente nem para ela nem para os alunos, além de nunca tê-lo feito em conteúdos de Geometria e Medida. Durante a frequência desses alunos no 5º. ano de escolaridade e até a data da recolha de dados, a professora usou com frequência, em todos os temas curriculares, representações nos três sistemas de representação (verbal, simbólico e visual), fazendo conversões entre eles, muitas vezes por meio de tratamentos, e dando aos alunos liberdade de escolha do sistema ou sistemas de representação a usar, desde que nada fosse dito em contrário. Esses atributos foram determinantes para o estudo do impacto do uso de tratamentos visuais em representações na atividade dos alunos.

OS DADOS

Os dados foram recolhidos da gravação áudio das aulas, fotografias dos registros escritos dos alunos e dos registros escritos da professora nos planos de aula. A professora usou um gravador áudio portátil para gravar todas as interações entre ela e o grupo de alunos. O equipamento que utilizou para as gravações se transportava facilmente e evitava ruídos durante as suas interações com os alunos, preservando o ambiente natural de sala de aula. Com esses dados, a professora escreveu duas narrações multimodais (A e B), de acordo com o protocolo de Lopes et al. (2014).

NARRAÇÃO MULTIMODAL

Uma narração multimodal (NM) consiste em duas partes: Um resumo com a apresentação e contextualização que identifica o tema, os objetivos, a organização espacial e temporal, e outros dados relevantes; e a narração de episódios com princípio e fim que constituem partes de aulas (LOPES et al., 2014; 2018). As narrações multimodais deste estudo consistem numa descrição detalhada do que aconteceu durante as aulas (ações e linguagens). Baseou-se nos dados recolhidos e na explicação das intenções e decisões da professora em diferentes fases de cada aula. Essas narrações foram validadas por dois investigadores externos, que recorreram aos dados recolhidos para verificar a sua conformidade com a narração, legibilidade e se estava autocontida.

AS TAREFAS

A professora elaborou duas tarefas do domínio Geometria e Medida. A Tarefa 1, “Polígonos e círculos” (Figura 1), foi usada para lecionar as noções de polígono inscrito numa circunferência, polígono circunscrito a uma circunferência, e rever a noção de polígonos regulares, de perímetro e de área e, ainda, de proporcionar uma situação de aprendizagem que satisfizesse o objetivo de aproximação por áreas de polígonos regulares inscritos (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA, 2013).

Figura 1 – Tarefa 1 “Polígonos e círculos” [excerto da NM A].

Polígonos e círculos

1. Destaca as figuras que representam **polígonos circunscritos a uma circunferência** e as cola no caderno.
 - a) **Identifica** cada um desses polígonos.
 - b) Esses polígonos são **regulares**? Por quê?
2. **Compara o perímetro do polígono A com o perímetro do círculo do seu interior.** O que você observa? **Compara o perímetro do polígono C com o perímetro do círculo do seu interior.** Você observa o mesmo?
 - a) Em qual deles se aproximarão a medida de perímetro do círculo e a medida de perímetro do polígono?
3. **Compara a área do polígono A com a área do círculo do seu interior.** O que você observa? **Compara a área do polígono C com a área do círculo do seu interior.** Você observa o mesmo?
 - a) Em qual deles se aproximarão a medida de área do círculo e a medida de área do polígono?
4. Nas figuras restantes, **desenha o polígono inscrito numa circunferência, recorta-as, cola-as no caderno e as identifica.**
5. **Compara o perímetro dos polígonos D, I e M com o perímetro do círculo.** O que você observa?
 - a) Em qual deles se aproximarão a medida do perímetro do círculo e a medida do perímetro do polígono?
6. **Compara a área dos polígonos D, I e M com a área do círculo.** O que você observa?
7. **Define polígono inscrito numa circunferência e polígono circunscrito a uma circunferência.**
8. Na figura C, **desenha um octógono inscrito na circunferência.** O que você pode dizer do perímetro e área dos dois octógonos e do círculo, em conjunto?

A Tarefa 2 incidiu sobre a fórmula da área de um polígono regular (MEC, 2013). A professora decidiu levar os alunos a usarem um tratamento visual que constava da decomposição de um polígono regular em triângulos geometricamente iguais, recortar e rearranjar num paralelogramo, cuja fórmula para a determinação da área já conheciam, e posterior dedução dessa fórmula para a fórmula da área de um polígono regular.

Para ensinar os conteúdos em questão, a professora adotou como estratégia de ensino uma situação de aprendizagem em que os alunos tivessem de realizar dois tipos de tratamentos visuais em círculos: na Tarefa 1 por meio da cor e na Tarefa 2 por intermédio da decomposição, recorte e rearranjo da figura inicial em outras figuras. A resolução das tarefas foi individual, para que todos os alunos fizessem tratamentos visuais às figuras fornecidas. Para rentabilizar o tempo, a professora forneceu diversas figuras em que os círculos tinham marcas na circunferência que indicavam uma divisão, de três até 12 partes iguais. Para que não apresentassem diferenças de ritmo significativas, pois a turma era heterogênea em termos de ritmo de trabalho, a professora assegurou que todos os alunos resolvessem as questões praticamente ao mesmo tempo.

ANÁLISE DOS DADOS

As narrações multimodais A e B foram analisadas para identificar as representações e caracterizar as transformações que os alunos fizeram durante a realização das tarefas. Formaram-se duas categorias de análise: representações e transformações de representações. Nas representações, formaram-se três categorias: Representação visual, representação simbólica e representação verbal. As representações visuais podem ser esquemas, gráficos, tabelas, figuras etc. As representações simbólicas podem ser numéricas ou algébricas, consoante utilizem linguagem numérica ou algébrica. Para cada uma delas, estabeleceu-se um código: Representação Visual – Figurativa (RV-F); Representação Simbólica – Numérica (RS-N) e Representação em Linguagem Natural (RLN). Nas transformações de representações, formaram-se duas categorias: Tratamentos (T) e conversões (C). Os tratamentos visuais (Figura 2) têm duas subcategorias: alterações numa representação visual sem mudança de sistema de representação (T_{RV}) ou alteração visual numa representação *não visual* sem mudança de sistema de representação ($T_{R \rightarrow RV}$).

Figura 2 – Subcategorias de tratamentos visuais.

À representação inicial figurativa (RV-F) acrescentou-se um quadrado circunscrito e, nos espaços sobranceiros, desenharam-se triângulos – Realizou-se um tratamento visual numa representação visual sem se sair do sistema visual (T_{RV}).

À representação simbólica numérica (RS-N) fez-se um tratamento resultante da resolução da expressão numérica. Os pequenos traços evidenciam as prioridades das operações e se consideram um tratamento visual numa representação simbólica ($T_{RS-N \rightarrow RV}$).

A elaboração das narrações multimodais permitiu a organização dos dados num documento só sendo depois utilizadas na análise. Sempre que era preciso confirmar algo ou surgia algo de novo, se consultavam os dados primários, reajustando a análise. No final, dois investigadores externos validaram a análise efetuada com uma análise independente, resultando refinamentos.

RESULTADOS

Essa intervenção constou da exploração de duas tarefas que foram executadas em duas sessões de aulas: a primeira sessão incluiu parte de uma aula e a aula seguinte; a segunda sessão constou de duas aulas. As duas sessões estiveram intermediadas por 13 dias. A professora utilizou dois tipos de tratamentos visuais: a sobreposição de figuras e a cor na primeira tarefa, e a decomposição e rearranjo de figuras geométricas na segunda tarefa cuja atividade está descrita, respectivamente, na Narração Multimodal A (NM A) e na Narração Multimodal B (NM B).

SEQUÊNCIA DE ENSINO SOBRE POLÍGONOS INSCRITOS NUMA CIRCUNFERÊNCIA, POLÍGONOS CIRCUNSCRITOS A UMA CIRCUNFERÊNCIA E ÁREAS POR APROXIMAÇÃO (TAREFA 1)

A Tarefa “Polígonos e círculos” constou de um conjunto de oito perguntas e 13 figuras geométricas (10 círculos divididos em 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 partes iguais, e três figuras (triângulo, pentágono e octógono) circunscritas a uma circunferência (Figura 1). As perguntas começavam pela exploração das três últimas figuras e levavam os alunos a conhecer características relativas ao seu número de lados e respectiva nomenclatura, regularidade, e comparação do perímetro e da área entre cada uma das figuras com as medidas correspondentes do círculo no seu interior. Teve o objetivo didático de que os alunos reconhecessem a aproximação dos dois perímetros e das duas áreas, respectivamente de cada um dos polígonos com o círculo correspondente, à medida que o número de lados do polígono aumentava, o que reconheceram na resposta à pergunta 2.a) e 3.a) (Figura 3).

Figura 3 – Respostas às questões 2 e 3 da tarefa [excerto da NM A].

Os alunos continuaram a resolver a tarefa por meio da exploração das restantes figuras. Desenharam o polígono inscrito em cada uma delas, unindo os pontos que já estavam marcados na circunferência, ficando com as duas figuras sobrepostas. Para fazê-lo, a professora sugeriu a utilização da cor (Figura 4), comparando os respectivos perímetros e as áreas.

Figura 4 – Tratamento visual (T_{RV}): sobreposição com desenho e pintura [excerto da NM A].

TRANSFORMAÇÕES DE REPRESENTAÇÕES – TRABALHO CONJUNTO

Em termos de representações escritas, todos os alunos trabalharam com representações em linguagem natural e representações visuais figurativas e realizaram um tratamento visual na representação figurativa inicial (T_{RV-F}). A sequência de transformações realizadas por todos os alunos está esquematicamente representada na Figura 5.

Figura 5 – Sequência de transformações de representações feitas por todos os alunos (tarefa “Polígonos e círculos”).

SEQUÊNCIA DE ENSINO SOBRE ÁREAS DE POLÍGONOS REGULARES (TAREFA 2)

Uma das estratégias utilizadas pela professora na leção de uma fórmula para a área de uma figura nova foi rearranjar essa figura de forma a transformá-la num retângulo, cuja fórmula para a área já era conhecida desde o 1º. Ciclo de escolaridade. Por exemplo, para determinar a fórmula para a área de um paralelogramo (conteúdo aprendido no ano letivo anterior) partiu-se de um paralelogramo e se transformou num retângulo tendo-se, em seguida, estabelecido a equivalência entre os elementos de cada uma das figuras: base do paralelogramo com o comprimento do retângulo e a altura do paralelogramo com a largura do retângulo (Figura 6).

Figura 6 – Registros feitos pela professora no quadro-negro [excerto da NM B].

Depois dessa revisão, a professora forneceu um octógono em papel branco para que os alunos o decompusessem em triângulos (Figura 7).

Figura 7 – Tratamento visual: Divisão do octógono em oito triângulos geometricamente iguais e marcação dos respectivos apótemas a tracejado [excerto da NM B].

A professora pretendia que os alunos reconhecessem que as áreas do octógono e dos oito triângulos eram equivalentes, o que o fizeram (Excerto 1 da NM B):

Excerto 1 – Excerto da Narração Multimodal B.

(35'01'') Prof.: *Quem tem mais área, o polígono que vocês colaram ou aqueles triângulos todos?*

Responderam que teriam a mesma área e relembramos o nome de figuras com a mesma área (figuras equivalentes). Perguntaram o que faziam com os triângulos. Em seguida, pedi-lhes que arrajassem uma maneira de fazer um retângulo com os triângulos. Ainda disse que podia ser também um paralelogramo. Não conseguiram fazer um retângulo, fizeram um paralelogramo.

A Figura 8, à esquerda, mostra o paralelogramo que os alunos construíram com os oito triângulos resultantes do octógono. Depois do paralelogramo construído, esquematizou-se a sua transformação num retângulo (esquema na Figura 8, à direita).

Figura 8 – Rearranjo dos oito triângulos num paralelogramo (à esquerda) e esquematização da transformação deste num retângulo (à direita) [excerto da NM B].

Depois desse rearranjo, alunos e professora estabeleceram a equivalência entre os elementos das três figuras (octógono, paralelogramo e retângulo) correspondendo a altura do paralelogramo com o apótema do polígono regular e com a largura do retângulo (Figura 9).

Figura 9 – Equivalência entre os elementos das figuras consideradas [excerto da NM B].

$$h_{\square} = ap_{oct} = l_{\square}$$

Em seguida, procederam à correspondência entre o comprimento do retângulo com a base do paralelogramo e o semiperímetro do octógono até encontrar a fórmula para calcular a área de um polígono regular (Excerto 2 da Narração Multimodal B).

Excerto 2 – Excerto da Narração Multimodal B.

Prof.: Nós sabemos que a altura é igual à...

Duarte: ...largura.

Prof.: Não.

Vários alunos: ... apótema.

Prof.: e vimos que a base

Belmira: ...é igual à metade do perímetro da figura.

Duarte: Isso já sabíamos.

Prof.: Então, agora olhem para aqui. Nós aqui tínhamos a fórmula do paralelogramo, que era . Substituímos a altura pelo apótema, a base pelo semiperímetro. É outra maneira de dizer metade do perímetro, e descobrimos como determinar a área do octógono. Aqui têm a fórmula.

E pelo registro que fizeram no quadro-negro e no caderno diário a partir da fórmula da área do paralelogramo (Figura 10, à esquerda) e a partir da fórmula do retângulo (Figura 10, à direita), todas escritas em linguagem simbólica (RS).

Figura 10 – Correspondência entre as fórmulas do paralelogramo (à esquerda) e do retângulo (à direita) com a fórmula do perímetro regular [excerto da NM B].

$$A_{\square} = b \times h$$

$$A_{oct} = \frac{P}{2} \times ap$$

$$A_{\square} = c \times d$$

$$A_{oct} = \frac{P}{2} \times ap$$

Por último, escreveu-se a fórmula em linguagem natural (RLN) (Figura 11).

Figura 11 – Representação em linguagem natural (RLN) [excerto da NM B].

A área do polígono regular é igual ao produto do semiperímetro pelo apótema.

TRANSFORMAÇÕES DE REPRESENTAÇÕES – TRABALHO CONJUNTO

Em termos de representações escritas, todos os alunos usaram representações em linguagem natural, representações visuais figurativas e representações simbólicas. Começaram por um tratamento visual na representação figurativa inicial (T_{RV-F} na Figura 7 e Figura 8), que consistiu na decomposição e rearranjo de uma figura em outras equivalentes. Depois, os alunos compararam as figuras construídas e estabeleceram correspondências entre os elementos de cada uma delas com representações verbais orais e representações simbólicas escritas, tendo culminado com uma representação verbal. Fizeram um tratamento visual numa representação simbólica (seta para indicar a correspondência entre elementos de duas figuras). A sequência de transformações que todos os alunos fizeram está esquematicamente representada na Figura 12.

Figura 12 – Sequência de transformações de representações feitas por todos os alunos durante a realização da Tarefa “Área do polígono regular”.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Stylianou e Silver (2004), bem como, outros autores, defendem rotinas para que os jovens desenvolvam as suas capacidades de explorar e operar representações visuais. Uma dessas formas é por intermédio da realização de tratamentos visuais (ver Figura 5 e Figura 12), que aliam as naturezas intrínseca e intencional dos modelos definidos por Nia e de Vries (2017). A natureza intrínseca das representações visuais relaciona-se com a versatilidade que pode ser usada e lhes confere o estatuto de artefato (MONTENEGRO et al., 2018), sendo o ponto de partida para fazer algo (ver, por exemplo, Figuras 7 e 8) e, por ser intencional lhes atribuiu o estatuto de ferramenta pela aquisição de conhecimentos novos (ver figuras 9, 10 e 11). Concluímos que uma das formas de o professor induzir os alunos

a usarem o artefato representações visuais como ferramenta é por meio da realização de tratamentos visuais. Importa saber agora como é que os alunos se apropriam e como reutilizam os tratamentos visuais como ferramenta de aprendizagem.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi financiado por Fundos Nacionais por intermédio da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto UID/CED/00194/2019.

REFERÊNCIAS

CALLEJO, M. L. & ZAPATERA, A. Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria, **Bolema**, v. 28, n. 48, 2014, p. 64-88.

DREYFUS, T. On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In: F. Furinghetti (Org.), **Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)**, v. 1, Assisi, Italy: Università di Genova, 1991, p. 33-48.

DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 61, n. 1-2, 2006, p. 103-131.

GOLDIN, G. A. Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), **Handbook of international research in mathematics education**. New York, NY: Routledge, 2008, p. 178-203.

JAIPAL, K. Meaning making through multiple modalities in a Biology classroom: A multimodal semiotics discourse analysis. **Science Education**, v. 9, n. 1, 2010, p. 48-72.

LOPES, J. B., SILVA, A. A., CRAVINO, J. P., SANTOS, C. A., CUNHA, A., PINTO, A., SILVA, A., VIEGAS, C., SARAIVA, E., & BRANCO, M. J. Constructing and using multimodal narratives to research in science education: Contributions based on practical classroom. **Research in Science Education**, v. 44. n. 3, 2014, p. 415-438.

LOPES, J. B., VIEGAS, C., PINTO, A., & OUTROS. **Melhorar práticas de ensino de Ciências e Tecnologia: Registrar e investigar com narrações multimodais**. Lopes, J. B., Viegas, C., Pinto, A. (Orgs.). Lisboa: Edições Sílabo, 2018.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA. **Programa e metas curriculares Matemática – Ensino básico**. Lisboa, Portugal: MEC, 2013.

MONAGHAN, J., TROUCHE, L., & BORWEIN, J. M. **Tools and mathematics**. Berlin: Springer International Publishing, 2016.

MONTENEGRO, P., COSTA, C., & LOPES, B. A congruência de conversões entre representações em tarefa com padrões no 6º. ano de escolaridade. In: Manuel Vara Pires; Rosa Tomás Ferreira; António Domingos; Cristina Martins; Helena Martinho; Isabel Vale; Nélia Amado; Susana Carreira; Teresa Pimentel; Leonor Santos, (Orgs.). **Investigação em Educação Matemática 2015 – Representações Matemáticas**. Portugal, Bragança: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (SPIEM), 2015, p. 115-129.

MONTENEGRO, P., COSTA, C., & LOPES, B. Multiple representations in problem solving with divisors and multiples. In: L. Gómez Chova, A. López Martínez, I. Candel Torres (Orgs.). **Proceedings of 11th International Technology, Education and Development Conference**, INTED2017. Spain, Valencia: IATED Academy, 2017c, p. 6.884-6.890.

MONTENEGRO, P., COSTA, C., & LOPES, B. The use of visual representations in Mathematics classes: a comparative case study. In: L. Gómez Chova, A. López Martínez, I. Candel Torres (Orgs.). **Proceedings of 11th International Technology, Education and Development Conference**, INTED2017. Spain, Valencia: IATED Academy, 2017b, p. 6.845-6.852.

MONTENEGRO, P., COSTA, C., & LOPES, B. Transformações de representações visuais na exploração de múltiplos e divisores de um número. **Comunicações Piracicaba**, v. 24, n. 1, 2017a, p. 55-68.

MONTENEGRO, P., COSTA, C., & LOPES, B. Transformations in the Visual Representation of a Figural Pattern. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 20, n. 2, 2018, p. 91-107.

MONTENEGRO, P., COSTA, C., & LOPES, B. Visual representation (table) to recreate a routine mathematical exercise. In: L. Gómez Chova, A. López Martínez, I. Candel Torres (Orgs.). **Proceedings 9th International Conference on Education and New Learning Technologies**, EDULEARN2017. Spain, Barcelona: IATED Academy, 2017d, p. 2.514-2.520.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: NCTM, 2000.

NIA, M. G., & DE VRIES, M. J. Models as artefacts of a dual nature: a philosophical contribution to teaching about models designed and used in engineering practice. **International Journal of Technology and Design Education**, v. 27, n. 4, 2017, p. 627-653.

PRESMEG, N. Research on visualisation in learning and teaching mathematics: Emergen-

ce from psychology. In: A. Gutiérrez & P. Boero (Orgs.), **Handbook of research on the psychology of mathematics education**. Dordrecht, Netherlands: Sense Publishers, 2006, p. 205-235.

REVELES, J., CORDOVA, R., & KELLY, G. Science literacy and academic identity formulation. **Journal of Research in Science Teaching**, v. 41, n. 10, 2004, p. 1.111-1.144.

SARAIVA, E., LOPES, J. B., CRAVINO, J. P., & SANTOS, C. A. How do teachers of physical sciences with different professional experience use visual representations with epistemic functions in the classroom? **Problems of Education in the 21st Century**, v. 42, 2012, p. 97-114.

STYLIANOU, D. A., & SILVER, E. A. The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert–novice similarities and differences. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 6, n. 4, 2004, p. 353-387.

VENKAT, H. & ASKEW, M. Mediating primary mathematics: theory, concepts, and a framework for studying practice. **Educational Studies in Mathematics**, v. 97, n. 71, 2018, p. 71-92.

YIN, R. K. **Case study research – design and methods** (3. ed.). Newbury Park: Sage Publications, 2003.

DADOS DOS AUTORES

PAULA MONTENEGRO

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro. Portugal. mpmvcardoso@gmail.com

CECÍLIA COSTA

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro. Portugal. mcosta@utad.pt

J. BERNARDINO LOPES

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro. Portugal. bloopes@utad.pt

Submetido em: 9-12-2018

Aceito em: 26-3-2019